Μάνος Μαυρογιάννης

3^o ΦΥΛΛΑΔΙΟ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1) Αν ισχύουν : $\alpha > 2$, $\beta > 2$, να αποδείξετε ότι : $\alpha \cdot \beta > \alpha + \beta$.

2) Αν ισχύουν : $0 < \alpha < \gamma$ και $0 < \beta < \delta$, να αποδείξετε ότι : $\alpha - \frac{1}{\beta} < \gamma - \frac{1}{\delta}$.

3) (i) Αν $\alpha , \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι : $\alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2 \geq 0$.

(ii) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, να αποδείξετε ότι : $\alpha \cdot \beta < 1$

4) Αν $\alpha , \beta , \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει : $\alpha + 2 \cdot \beta + 4 \cdot \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι : $\beta^2 \geq 4 \cdot \alpha \cdot (\beta + \gamma)$

5) Αν $1 < \chi \leq 2$ και $3 \leq \psi < 4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις : (α) $A = 2 \cdot \chi - 3 \cdot \psi$, (β) $B = \chi \cdot \psi$, (γ) $\Gamma = \frac{\chi}{\psi}$, (δ) $\Delta = \frac{\chi - 1}{\psi + 1}$, (ε) $E = \chi^2 - \psi^3$.

6) Αν $\alpha < \beta$ και ισχύει : $\alpha^2 - \beta^2 < -1$, να αποδείξετε ότι : $\beta > 0$ και στη συνέχεια ότι : $\beta > 1$.

7) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και ισχύει : $\alpha^5 + \alpha^3 + \alpha = 4$, να αποδείξετε ότι : $\alpha > 0$.

8) Αν $\beta > 0$ και $\alpha - \beta = 1$, να αποδείξετε ότι $\beta + \frac{\alpha}{\beta} \geq 3$.

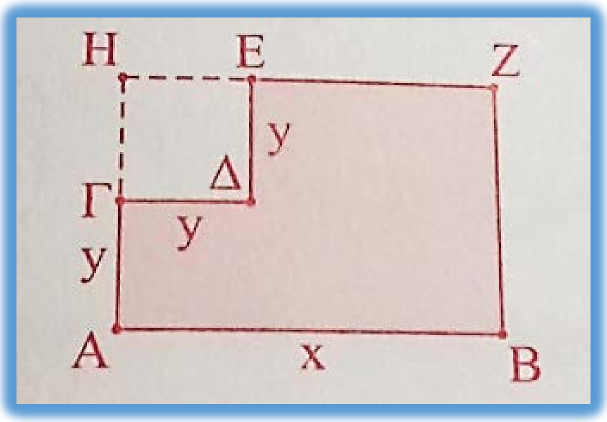
9) Δίνονται οι αριθμοί α , β τέτοιοι ώστε να ισχύει : $\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{2}$. Να δείξετε ότι :

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} < \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} < \frac{\alpha^3}{\alpha^3 + \beta^3} .$$

10) Από το ορθογώνιο $AB ZH$ του παρακάτω σχήματος αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma\Delta EH$ πλευράς ψ .

(i) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZB A\Gamma\Delta$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση : $\Pi = 2 \cdot \chi + 4 \cdot \psi$.

(ii) Αν ισχύει : $5 < \chi < 8$ και $1 < \psi < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου και του εμβαδού του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος .



4ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ — ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ΜΕΡΟΣ 1ο)

1) Αν ισχύει $|3\alpha+2\beta|<|6\alpha+\beta|$, $\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι :

(i) $\alpha\neq 0$, (ii) $|\beta|<3\cdot|\alpha|$, (iii) $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|-\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<\frac{8}{3}$, (iv) $\alpha<0$, όταν $3\cdot\alpha<\beta$

2) Αν $\chi\,,\psi\neq 0$ και ισχύει : $|\chi+\psi|>|\chi-\psi|$, να αποδείξετε ότι :

(i) οι αριθμοί $\chi\,,\psi$ είναι ομόσημοι , (ii) $\chi\cdot|\psi|-|\chi|\cdot\psi=0$.

3) Αν για τους $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει : $\frac{\alpha\cdot\beta-4}{2}>\beta-\alpha$, να αποδείξετε ότι : $|\alpha-2|+|\beta+2|=|\alpha+\beta|$.

4) Να λύσετε τις εξισώσεις : (i) $d(2\chi\,,\,3)-1=0$, (ii) $|\chi^2-\chi|+|\chi^2-1|=0$,

(iii) $|\chi^2-5\cdot\chi+6|-|\chi-2|=0$, (iv) $|\chi-1|=3\cdot\chi-7$,

(v) $1+\frac{|2\cdot\chi-3|-3}{2}=\frac{|6\cdot\chi-9|+2}{4}$, (vi) $||\chi-1|+1|=3$, (vii) $|\,|\chi-2|-1|=1$.

5) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $|\chi-2|+1=\alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

6) (i) Να λύσετε την εξίσωση : $|\chi|-\frac{2|-\chi|-5}{6}=\frac{|3\chi|}{2}$ (1)

(ii) Να λύσετε την εξίσωση : $1-\frac{1}{\chi+2}-\frac{1}{2-\chi}=\frac{\chi+6}{\chi^2-4}$ (2)

(iii) Αν ρ_1 , ρ_2 είναι οι μη αρνητικές ρίζες των εξισώσεων (1) και (2) αντιστοίχως να λύσετε την εξίσωση : $|9\chi^2-\rho_1|-|3\chi+\rho_2-2|=0$.

7) Αν $-1<\chi<7$, να απλοποιήσετε την παράσταση : $A=|\chi+1|+|\chi+2|+|\chi-2|+|2\chi-7|+\chi$.

8) Θεωρούμε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει : $d(\alpha\,,0)<1$.

(i) Να αποδείξετε ότι : $|2-|\alpha-1||=\alpha+1$.

(ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A=|2\cdot\alpha-2|-|3\cdot\alpha+4|$.

9) Θεωρούμε τους αριθμούς $\chi\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει : $d(\chi\,,3)\leq 1$.

(i) Να αποδείξετε ότι : $\chi\in[2\,,\,4]$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης : $A=|\chi-2|+|\chi-4|$ είναι ανεξάρτητη του χ.

(iii) Να αποδείξετε ότι : $\chi^2-6\cdot\chi+8\leq 0$.

(iv) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $B=|6\cdot\chi-8-\chi^2|+|\chi^2+9-6\cdot\chi|$.

10) Να αποδείξετε ότι :

(i) $\alpha\cdot\beta+|\alpha\cdot\beta|\geq|\alpha|\cdot\beta+\alpha\cdot|\beta|$, για κάθε $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$

(ii) $\frac{\alpha}{|\alpha|}+\frac{\beta}{|\beta|}\leq 2$, για κάθε $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}^*$.

Μάνος Μαυρογιάννης

5ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ — ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ΜΕΡΟΣ 2ο)

1) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{\chi^2-2\cdot|\chi|}{|\chi|-2}$

(i) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A.
(ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
(iii) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύει : $\mathrm{A}<3$.

2) Θεωρούμε τους αριθμούς α , $\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν : $-1<\dfrac{2\cdot\alpha+1}{\alpha+2}<1$, $\alpha\neq-2$ και $|\beta|^3-1<\beta^2-|\beta|$. Να αποδείξετε ότι :

(i) $|\alpha|<1$, (ii) $|\beta|<1$, (iii) $|1+\alpha\cdot\beta|>|\alpha+\beta|$, (iv) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}+2\right|<\dfrac{4}{|\alpha\cdot\beta|}$, όπου α , $\beta\neq0$,

(v) $|\alpha+\beta|<1$, όταν $|\alpha-\beta|=\sqrt{3}$.

3) Να λύσετε τις ανισώσεις : (i) $\big|\chi-|\chi|\big|<1$, (ii) $d(2\chi,-1)\geq1$, (iii) $d(\chi,-2)\leq0$,
(iv) $|\chi-1|<|\chi+2|$, (v) $|\chi+1|\geq-2$, (vi) $2\leq|\chi-3|<4$.

4) Σε έναν άξονα τα σημεία A , B , M αντιστοιχούν στους αριθμούς -1 , 5 , χ αντίστοιχα και ισχύει : $|\chi+1|\geq|\chi-5|$.

(i) Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|\chi+1|$ και $|\chi-5|$.
(ii) Ποιά γεωμετρική ιδιότητα του M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .
(iii) Με χρήση του άξονα , να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού χ που αντιστοιχεί στο σημείο M και στη συνέχεια , να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας .
(iv) Αν επιπλέον το σημείο N στον άξονα αντιστοιχεί στον αριθμό ψ και ισχύει : $|\psi|\leq1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης : $\mathrm{K}=|\chi-\psi|$.

5) Αν για τον πραγματικό αριθμό χ ισχύει : $|2\chi-1|<1$, τότε :

(i) να αποδείξετε ότι : $0<\chi<1$.
(ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς : χ , χ^2, χ^3 και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

6) Αν ισχύει : $|\chi|<1$, να λύσετε την ανίσωση : $\big|\chi-|\chi|\big|+\big||\chi|-2\big|>\dfrac{3}{4}$.